

Scientific Review – Engineering and Environmental Sciences (2020), 29 (4), 444–453
Sci. Rev. Eng. Env. Sci. (2020), 29 (4)
Przegląd Naukowy – Inżynieria i Kształtowanie Środowiska (2020), 29 (4), 444–453
Prz. Nauk. Inż. Kszt. Środ. (2020), 29 (4)
<http://iks.pn.sggw.pl>
DOI 10.22630/PNIKS.2020.29.4.38

Mykola NAGIRNIAK

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Instytut Inżynierii Lądowej
Warsaw University of Life Sciences – SGGW, Institute of Civil Engineering

Płyty kołowe Hencky’ego–Bolle’a spoczywające na podłożu sprężystym Własowa **Hencky–Bolle’s circular plates resting on the Vlasov’s elastic subsoil**

Słowa kluczowe: płyty kołowe Hencky’ego–Bolle’a, podłoże Winklera, podłoże Własowa
Key words: Hencky–Bolle’s circular plates, Winkler’s subsoil, Vlasov’s subsoil

Wprowadzenie

W praktyce inżynierskiej istnieje potrzeba rozwiązania zagadnień zginania płyt spoczywających na podłożu gruntowym, będących fundamentem budynków i innych obiektów inżynierskich. Naprężenia i przemieszczenia konstrukcji w znacznym stopniu zależą od właściwego zaprojektowania fundamentu. Płyty średniej grubości rozmaitego kształtu są stosowane przy budownictwie dużej liczby obiektów budowlanych (Gabbasow i Hoang Tuan, 2014). Budynki, zbiorniki, piece, kominy itp. konstrukcje w kształcie koła, a także maszty, wieże,

elektrownie wiatrowe często posadawiane są na płytach kołowych średniej grubości lub grubych. Płyty kołowe jako fundamenty pod kominami czy masztami są głównie obciążone siłą skupioną lub równomiernym obciążeniem na okręgu koła o danym promieniu, w szczególności na brzegu płyty. Sposób rozwiązania tak obciążonych płyt cienkich Kirchhoffa spoczywających na podłożu dwuparametrowym przedstawiono w monografii Własowa i Leontiewa (1960).

Zagadnienia współpracy konstrukcji z podłożem najczęściej dotyczą fundamentowania i obudowy wykopów. Aktualnie duże przedsięwzięcia (np. fundamenty wysokościowców) są w praktyce obliczane metodą elementów skończonych przy wykorzystaniu sprężysto-plastycznego modelu gruntu. Zdecydowana większość zagadnień dotyczących mniejszych obiektów jest rozwiązywana

przy wykorzystaniu programów, w których podłoże reprezentowane jest przez materiał sprężysty odpowiadający założeniom Winklera. Takie podejście jest powszechnie krytykowane ze względu na nieadekwatność założeń teorii Winklera do podłoża gruntowego, np. w pracy Bednarka (2014). Przede wszystkim współczynnik sprężystości podłoża (k) nie jest wielkością stałą dla danego gruntu. Także model Winklera nie uwzględnia przemieszczeń podłoża poza obciążonym miejscem, np. w przypadku belki obciążonej równomiernie (Leontiew, Leontiew, Sobolew i Anochin, 1982).

W literaturze przedmiotu znajdujemy prace, w których opisano zginanie płyt zarówno cienkich Kirchhoffa spoczywających na podłożach Winklera i Własowa, półprzestrzeni sprężystej i innych modelach podłoża, jak i średniej grubości (głównie teorie płyt Reissnera) bądź grubych spoczywających głównie na podłożu Winklera (Zwoliński, 1980). Wybór teorii płyt zależy od rozważanego problemu i żądanej dokładności rozwiązania. Teorie jednorodnych płyt średniej grubości należy stosować w przypadku, gdy iloraz grubości płyty (h) do charakterystycznego wymiaru (a) jest większy od 1/10, a mniejszy od 1/4 (Jemielita 2001). Teorie te zastosowano m.in. przy badaniu efektu brzegowego (Bolle, 1947; Nagirniak, 2019).

W prezentowanej pracy, w odróżnieniu od monografii Własowa i Leontiewa (1960), rozpatrzono płyty średniej grubości Hencky’ego–Bolle’a spoczywające na podłożu sprężystym Własowa. Porównano wartości przemieszczeń i sił przekrojowych otrzymanych według teorii płyt Kirchhoffa i uogólnionej teorii płyt Hencky’ego–Bolle’a spoczywa-

jących na podłożu sprężystym Własowa. Zbadano wpływ współczynnika Poissona materiału płyty na wartości ugięć i sił przekrojowych.

Równanie różniczkowe płyt spoczywających na podłożu sprężystym Własowa

W pracy Nagirniaka (2020) przedstawiono m.in. następujące równania płyt na podłożu sprężystym Własowa, właściwości którego są opisywane dwoma uogólnionymi charakterystykami k i t , przy założeniu, że kontakt między płytą a podłożem zawsze istnieje (więzy dwustronne, oznacza to spełnienia równości $w(x_\alpha) = w_g(x_\alpha, 0)$):

– płyty cienkiej Kirchhoffa

$$\nabla^4 w(x_\alpha) - 2r_1^2 \nabla^2 w(x_\alpha) + s_1^4 w(x_\alpha) = \frac{p(x_\alpha)}{D} \quad (1)$$

gdzie:

$$r_1^2 = \frac{t}{D}, \quad s_1^4 = \frac{k}{D} \quad (2)$$

$$k = \frac{E_g (1 - \nu_g)}{(1 + \nu_g)(1 - 2\nu_g)} \int_0^{h_g} \left(\frac{d}{dz} (\mathcal{G}(z)) \right)^2 dz \quad (3)$$

$$t = \frac{E_g}{4(1 + \nu_g)} \int_0^{h_g} \mathcal{G}(z)^2 dz \quad (4)$$

E_g – moduł sprężystości gruntu [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$],
 ν_g – współczynnik Poissona gruntu [-],
 h_g – grubość warstwy gruntu [m],

$\mathcal{G}(z)$ – funkcja zanikania przemieszczeń z głębokością [-],
 D – sztywność płyty na zginanie [N·m],
 $p(x_\alpha)$ – obciążenie zewnętrzne działające na płytę [N·m⁻²];

– płyty średniej grubości Hencky’ego–Bolle’a

$$\begin{aligned} \nabla^4 w(x_\alpha) - 2r_2^2 \nabla^2 w(x_\alpha) + s_2^4 w(x_\alpha) = \\ = \frac{p(x_\alpha)}{D} - \frac{1}{K} \nabla^2 p(x_\alpha) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2K}{D(1-\nu)} \Psi = 0 \quad (6)$$

gdzie:

$$r_2^2 = \frac{\left(\frac{k}{K} + \frac{t}{D}\right)}{2\left(1 + \frac{t}{K}\right)}, \quad s_2^4 = \frac{k}{D\left(1 + \frac{t}{K}\right)} \quad (7)$$

Ψ – część rotacyjna wektora przemieszczeń,

K – sztywność płyty na ścinanie [N·m⁻¹].

Funkcja $\mathcal{G}(z)$ jest funkcją zanikania przemieszczeń w podłożu, przy czym przyjmujemy $\mathcal{G}(z) = 1$.

Własow proponuje przyjąć następujące postacie funkcji $\mathcal{G}(z)$:

– funkcję liniową

$$\mathcal{G}(z) = 1 - \frac{z}{h_g} \quad (8)$$

– funkcję hiperboliczną

$$\mathcal{G}(z) = \frac{sh\gamma(h_g - z)}{sh\gamma h_g} = \frac{sh\gamma_1 \left(1 - \frac{z}{h_g}\right)}{sh\gamma_1} \quad (9)$$

gdzie:

γ – współczynnik zanikania osiadania gruntu [m⁻¹],

γ_1 – współczynnik zanikania osiadania gruntu [-].

Równanie modelu podłoża Własowa zapiszemy w postaci (Własow i Leon-tiew, 1960):

$$q(x_\alpha) = kw_g(x_\alpha) - 2t\nabla^2 w_g(x_\alpha) \quad (10)$$

W przypadku ugięć obrotowo symetrycznych płyt kołowych spoczywających na podłożu sprężystym równania (1) i (5) stają się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi:

– płyty cienkiej Kirchhoffa na podłożu Własowa

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right]^2 - 2r_1^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + s_1^4 \right\} w = \\ = \frac{p(r)}{D} \end{aligned} \quad (11)$$

– płyty średniej grubości Hencky’ego–Bolle’a na podłożu Własowa

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right]^2 - 2r_2^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + s_2^4 \right\} w(r) = \\ = \frac{p(r)}{D} - \frac{1}{K} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right] p(r) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{2K}{D(1-\nu)} \right] \Psi(r) = 0 \quad (13)$$

Wprowadźmy współrzędną bezwymiarową $\rho = \frac{r}{a}$, przy czym a jest wielkością o wymiarze długości, np. promień płyty.

W przypadku kiedy na płytę nie działa rozłożone obciążenie powierzchniowe

(p), jednorodne równania różniczkowe (11) i (12) zapiszemy w postaci:

$$\left\{ \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) \right]^2 - 2\hat{r}_\alpha^2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + \hat{s}_\alpha^4 \right\} w(\rho) = 0 \quad (14)$$

gdzie:

$$\hat{r}_\alpha^2 = r_\alpha^2 a^2, \quad \hat{s}_\alpha^4 = s_\alpha^4 a^4, \quad \alpha = 1, 2 \quad (15)$$

a równanie (13) przyjmuje postać:

$$\left[\frac{1}{a^2 \rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{2K}{D(1-\nu)} \right] \Psi(\rho) = 0 \quad (16)$$

Równania (14) możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \left(\hat{r}_\alpha^2 + \sqrt{\hat{r}_\alpha^4 - \hat{s}_\alpha^4} \right) \right] \times \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \left(\hat{r}_\alpha^2 - \sqrt{\hat{r}_\alpha^4 - \hat{s}_\alpha^4} \right) \right] w(\rho) = 0 \quad (17)$$

Rozwiązanie równania różniczkowego czwartego rzędu można zastąpić układem dwóch równań drugiego rzędu:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \mu_{\alpha\beta}^2 \right] w_{\alpha\beta}(\rho) = 0 \quad (18)$$

gdzie:

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = \hat{r}_\alpha^2 \pm \sqrt{\hat{r}_\alpha^4 - \hat{s}_\alpha^4} \quad (19)$$

gdzie:

$$\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2.$$

Przy oznaczeniach:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha 1} &= \sqrt{\hat{r}_\alpha^2 + \sqrt{\hat{r}_\alpha^4 - \hat{s}_\alpha^4}} \\ \mu_{\alpha 2} &= \sqrt{\hat{r}_\alpha^2 - \sqrt{\hat{r}_\alpha^4 - \hat{s}_\alpha^4}} \end{aligned} \quad (20)$$

równania różniczkowe (18) zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \mu_{\alpha 1}^2 \right] w_{\alpha 1} &= 0 \\ \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \mu_{\alpha 2}^2 \right] w_{\alpha 2} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $\hat{r}_\alpha^4 > \hat{s}_\alpha^4$

W tym przypadku rozwiązaniem równania różniczkowego (14) są zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego rzędu, pierwszego i drugiego rodzaju. Całkę ogólną równania (14) zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} w_\alpha(\rho) &= C_1 I_0(\mu_{\alpha 1} \rho) + \\ &+ C_2 K_0(\mu_{\alpha 1} \rho) + C_3 I_0(\mu_{\alpha 2} \rho) + \\ &+ C_4 K_0(\mu_{\alpha 2} \rho) \end{aligned} \quad (22)$$

2. $\hat{r}_\alpha^4 < \hat{s}_\alpha^4$

W tym przypadku parametry $\mu_{\alpha\beta}^2$ są liczbami zespolonymi

$$\mu_{\alpha\delta}^2 = \hat{r}_\alpha^2 \pm i \sqrt{\hat{s}_\alpha^4 - \hat{r}_\alpha^4} \quad (23)$$

Rozwiązanie równania (14) tym razem można przedstawić w postaci (Kączkowski, 2000):

$$\begin{aligned}
w_\alpha(\rho) = & C_1 ber(\kappa_\alpha \rho, \psi_\alpha) + \\
& + C_2 bei(\kappa_\alpha \rho, \psi_\alpha) + \\
& + C_3 ker(\kappa_\alpha \rho, \psi_\alpha) + \\
& + C_4 kei(\kappa_\alpha \rho, \psi_\alpha)
\end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:

$$\kappa_\alpha^2 = \hat{s}_\alpha^2, \quad \psi_\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\hat{r}_\alpha^2}{\hat{s}_\alpha^2}\right) \quad (25)$$

$ber(\rho, \psi)$, $bei(\rho, \psi)$, $ker(\rho, \psi)$, $kei(\rho, \psi)$ – zmodyfikowane funkcje Bessela, przy czym (Kączkowski, 2000):

$$ber(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho^{2n} \cos(2n\psi)}{2^{2n} (n!)^2} \right) \quad (26)$$

$$bei(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho^{2n} \sin(2n\psi)}{2^{2n} (n!)^2} \right) \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
kei(\rho, \psi) = & [\ln 2 - C - \ln(\rho)] bei(\rho, \psi) - \\
& - \psi ber(\rho, \psi) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho^{2n} \sin(2n\psi)}{2^{2n} (n!)^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)
\end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
ker(\rho, \psi) = & [\ln 2 - C - \ln(\rho)] ber(\rho, \psi) - \\
& - \psi bei(\rho, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho^{2n} \cos(2n\psi)}{2^{2n} (n!)^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)
\end{aligned} \quad (29)$$

Przy $\psi = \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy tzw. funkcje Thomsona.

Płyta kołowa obciążona równomiernym obciążeniem na brzegu spoczywająca na podłożu Własowa

Rozpatrzmy płytę kołową Hencky'ego–Bolle'a obciążoną równomiernie rozłożonym na brzegu obciążeniem P_k , spoczywającą na podłożu Własowa (rys. 1).

Dla rzeczywistych gruntów występujących w praktyce budowlanej mamy do czynienia z drugim przypadkiem, tzn. $\hat{r}_2^4 < \hat{s}_2^4$. Rozwiązanie równania różniczkowego (14) zapiszemy w postaci (24). Z uwagi na interpretację fizyczną rozpatrywanego zagadnienia zmodyfikowane funkcje Bessela ber , bei , ker , kei muszą spełniać warunki: $w_\alpha(0) < \infty$ oraz $\frac{dw_\alpha(0)}{d\rho} = 0$.

Uwzględniając powyższe warunki, stałe $C_3 = C_4 = 0$. Ostatecznie rozwiązanie równania różniczkowego (14) zapiszemy w postaci:

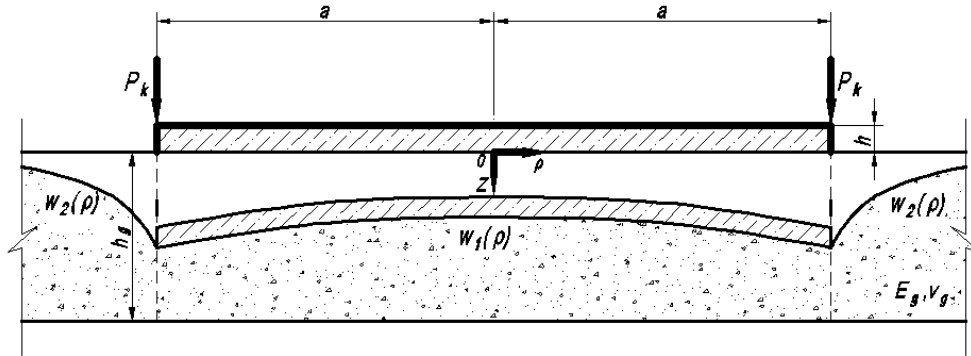
$$w_1(\rho) = C_1 ber(\kappa_2 \rho, \psi_2) + C_2 bei(\kappa_2 \rho, \psi_2) \quad (30)$$

gdzie κ_2 , ψ_2 są dane wzorem (25).

Poza granicą płyty przy $R \leq \rho < \infty$ stan naprężeniowo-odkształceniowy w podłożu sprężystym wyznacza się w ogólnym przypadku równaniem różniczkowym (10). Przy braku obciążenia powierzchniowego działającego na podłożu w granicach rozpatrywanego odcinka równanie (10) zapiszemy w postaci:

$$kw(\rho) - 2t \nabla_\rho^2 w(\rho) = 0 \quad (31)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (31) są zmodyfikowane funkcje



RYSUNEK 1. Przekrój płyty kołowej obciążonej równomiernie na okręgu koła, spoczywającej na podłożu Własowa

FIGURE 1. Cross-section of a circular plate evenly loaded on a circle of a circle, resting on the Vlasov's subsoil

Bessela zerowego rzędu, pierwszego i drugiego rodzaju. Uwzględniając, że $w_2(\infty) = 0$, ostateczne rozwiązanie równania (31) zapiszemy w postaci:

$$w_2(\rho) = C_3 K_0(\lambda \rho) \quad (32)$$

gdzie:

$$\lambda = a \sqrt{\frac{k}{2t}}$$

$K_0(\lambda \rho)$ – zmodyfikowana funkcja Bessela zerowego rzędu, drugiego rodzaju.

Warunki brzegowe zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} w_1(1) &= w_2(1), \quad M_\rho(1) = 0, \\ Q_\rho(1) + S_{1\rho}(1) &= S_{2\rho}(1) + P_k \end{aligned} \quad (33)$$

Dla płyty Hencky'ego–Bolle'a siły przekrojowe zapiszemy w postaci (Jemielita, 2001):

$$\begin{aligned} M_\rho &= D \left[(1-\nu) \kappa_\rho + \nu (\kappa_\rho + \kappa_\phi) \right] + \\ &+ \frac{\nu h^2 p_3}{10(1-\nu)} \end{aligned} \quad (34)$$

$$Q_\rho = K \chi_\rho \quad (35)$$

$$\kappa_\rho = -\frac{1}{a} \frac{d\phi_\rho}{d\rho}, \quad \kappa_\phi = -\frac{\phi_\rho}{a\rho}$$

$$\chi_\rho = \frac{1}{a} \frac{dw}{d\rho} - \phi_\rho \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \phi_\rho &= \frac{1}{a} \frac{dw(\rho)}{d\rho} + \frac{D(1-\nu)}{2K} \times \\ &\times \left[\frac{2}{(1-\nu)a^3} \frac{d}{d\rho} (\nabla_\rho^2 w(\rho)) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{(1-\nu)Ka} \frac{d}{d\rho} (p_3) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$K = \kappa h G = \frac{5hG}{6} \quad (38)$$

$$D = \frac{Gh^3}{6(1-\nu)} \quad (39)$$

gdzie:
 h – grubość płyty,

ν – współczynnik Poissona materiału płyty,
 a – promień płyty.

We wzorze (38) przyjęto współczynnik ścinania $\kappa = 5/6$ (Jemielita, 2002).

Uogólnioną siłę poprzeczną $S_{\alpha\rho}$ w podłożu gruntowym modelu Własowa w układzie współrzędnych biegunowych wyznaczmy ze wzoru:

$$S_{\alpha\rho} = \frac{2t}{a} \frac{dw_{\alpha}(\rho)}{d\rho} \quad (40)$$

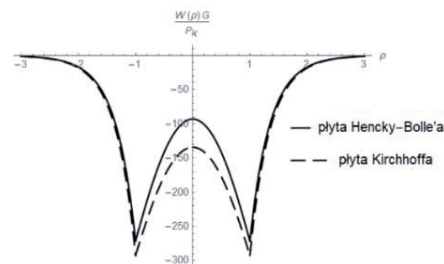
Przyjmując funkcje zanikania przemieszczeń $\vartheta(z)$ w postaci (8) oraz zakładając $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{10}$, $\delta_1 = \frac{h_g}{a} = 1$, $\delta_2 = \frac{\nu_g}{\nu} = 1$,

$$\delta_3 = \frac{G_g}{G_p} = \frac{1}{500}, \text{ dane dla gruntu przyjęto}$$

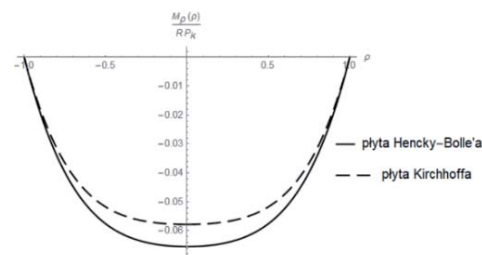
na podstawie Sorochan i Trofimenkow (1985), a dla betonu według PN-EN 1992-1-1:2004+AC:2008 (gdzie: δ – stosunek grubości płyty do jej promienia, δ_1 – stosunek grubości warstwy gruntu do promienia płyty, δ_2 – stosunek współczynnika Poissona gruntu do współczynnika Poissona płyty, δ_3 – stosunek modułu sprężystości gruntu do modułu sprężystości płyty).

Na rysunkach 2–4 przedstawiono bezwymiarowe porównawcze wykresy ugięcia oraz sił przekrojowych dla płyt Kirchhoffa oraz Hencky’ego–Bolle’a spoczywających na podłożu sprężystym Własowa. Porównano wyniki ugięć oraz sił przekrojowych dla płyt kołowych (otrzymane według teorii Kirchhoffa oraz Hencky’ego–Bolle’a) spoczywających na podłożu sprężystym Własowa. Widoczne jest, że bardzo szybko zanikają przemieszczenia i zastępcze siły poprzeczne w podłożu gruntowym.

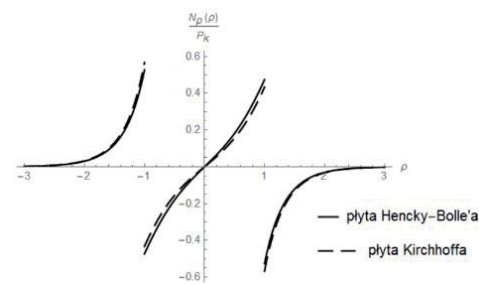
Ugięcia otrzymane według teorii płyt Hencky’ego–Bolle’a są mniejsze od tych według teorii Kirchhoffa, a momenty zginające są większe w płycie Hencky’ego–Bolle’a.



RYSUNEK 2. Wykres ugięcia płyty spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$
 FIGURE 2. Diagram of deflection of plate resting on the Vlasov’s subsoil for $\nu = 0$

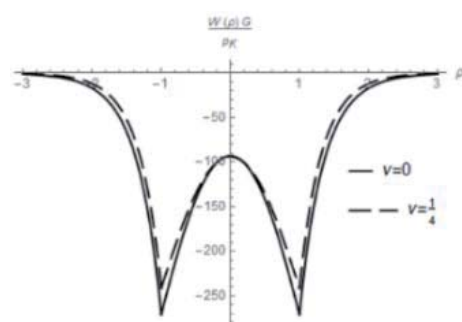


RYSUNEK 3. Wykres momentów zginających w płycie spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$
 FIGURE 3. Diagram of the bending moments in the plate resting on the Vlasov’s subsoil for $\nu = 0$



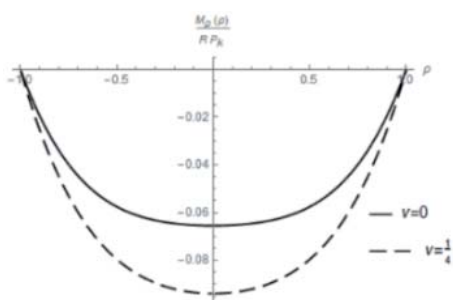
RYSUNEK 4. Wykres siły poprzecznej w płycie spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$
 FIGURE 4. Diagram of lateral force in the plate resting on the Vlasov’s subsoil for $\nu = 0$

W pracy przeanalizowano także wpływ współczynnika Poissona materiału płyty na wartości momentów zginających, sił poprzecznych i ugięć płyty (wyniki przedstawiono na rys. 5–7). Współczynnik Poissona w znacznym stopniu wpływa na wartości momentów oraz ugięć, praktycznie nie ma zaś wpływu na wartości sił poprzecznych zarówno w płycie, jak i podłożu gruntowym. W tabeli przedstawiono bezwy-



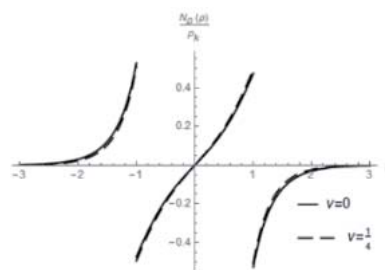
RYSUNEK 5. Wykres ugięcia płyty Hencky'ego–Bolle'a spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$ i $\nu = 1/4$

FIGURE 5. Diagram of deflection of the Hencky–Bolle plate resting on the Vlasov's subsoil for $\nu = 0$ and $\nu = 1/4$



RYSUNEK 6. Wykres momentów zginających w płycie Hencky'ego–Bolle'a spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$ i $\nu = 1/4$

FIGURE 6. Diagram of the bending moments of the Hencky–Bolle plate resting on the Vlasov's subsoil for $\nu = 0$ and $\nu = 1/4$



RYSUNEK 7. Wykres siły poprzecznej w płycie Hencky'ego–Bolle'a spoczywającej na podłożu Własowa dla $\nu = 0$ i $\nu = 1/4$

FIGURE 7. Diagram of lateral force of the Hencky–Bolle plate resting on the Vlasov's subsoil for $\nu = 0$ and $\nu = 1/4$

miarowe wartości ugięcia oraz momentów zginających dla płyt Kirchhoffa oraz Hencky'ego–Bolle'a spoczywających na podłożu Własowa dla $\rho = 0$ i $\rho = 1$.

Wprowadzono oznaczenie: $N_\rho(\rho) = Q_\rho(\rho) + S_\rho(\rho)$ – suma sił poprzecznych w płycie oraz w podłożu gruntowym.

Podsumowanie

W pracy rozpatrzono teorie płyt cienkich Kirchhoffa oraz średniej grubości Hencky'ego–Bolle'a na jednokierunkowym, dwuparametrowym podłożu sprężystym Własowa. Ten model uwzględnia naprężenia styczne w podłożu gruntowym, co z kolei daje dokładniejsze wyniki w porównaniu z modelem podłoża Winklera i pozwala na wyliczenie przemieszczeń w podłożu gruntowym poza granicami konstrukcji spoczywającej na podłożu (np. płyty). Przyjęto liniową funkcję zanikania przemieszczeń wraz z głębokością. Dla płyty obrotowo-symetrycznej funkcja ugięcia zależy tylko od jednej zmiennej przestrzennej (ρ). Teoria płyt Kirchhoffa, jak wiadomo,

TABELA. Porównanie wyników obliczeń płyt Kirchhoffa i Hencky’ego–Bolle’a spoczywających na podłożu Własowa w punktach charakterystycznych
 TABLE. Comparison of the results of the calculations of Kirchhoff and Hencky–Bolle plates resting on the Vlasov’s bedrock at characteristic points

Ugięcie płyty	$\frac{w(\nu=0)G}{P_k}$		$\frac{w\left(\nu=\frac{1}{4}\right)G}{P_k}$	
Rodzaj płyty	Kirchhoffa	Hencky’ego–Bolle’a	Kirchhoffa	Hencky’ego–Bolle’a
$\rho = 0$	134,2	93,1	121,8	93,8
$\rho = 1$	292,1	271,2	256,1	241,5
Moment zginający płyty	$\frac{M_\rho(\nu=0)}{R P_k}$		$\frac{M_\rho\left(\nu=\frac{1}{4}\right)}{R P_k}$	
$\rho = 0$	-0,058	-0,065	-0,085	-0,094

ma ograniczony zakres stosowania: zależy od stosunku grubości płyty (h) do jej wymiaru charakterystycznego (a), obciążenia i warunków brzegowych. W przypadku płyt, których iloraz h do a jest większy od $1/10$, należy stosować teorie płyt średniej grubości, dlatego że wyniki mogą być obciążone dużym błędem (Jemielita, 2001). Ten sam wniosek dotyczy płyt spoczywających na podłożu sprężystym. Różnice między wartościami ugięć i sił przekrojowych płyt spoczywających na podłożu Własowa (uzyskane według teorii Kirchhoffa oraz Hencky’ego–Bolle’a) zostały pokazane na rysunkach 2–4 oraz w tabeli. Wpływ współczynnika Poissona (ν) na wyniki jest istotny dla wartości ugięć i momentów zginających, a dla wartości sił poprzecznych jest zaś znikomy.

Literatura

Bednarek, R. (2014). Osiadanie powierzchni ograniczonej na podłożu sprężystym. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, 3, 221-224.

- Bolle, L. (1947). Contribution au problème linéaire de flexion d’une plaque élastique. *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, 73, 293-298.
- Gabbasow, R. i Hoang Tuan, A. (2014). Raszchet izgibajemych platin sredniej tołszcziny na dinamiczeskije nagruzki s ispolzowanijem obobszczennykh urawnenij metoda koniecznykh raznostiej. *Wiestnik MGSU*, 10, 16-23.
- Jemielita, G. (2001). Teorie płyt sprężystych. W C. Woźniak (red.), *Mechanika techniczna*. Tom VIII. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Jemielita, G. (2002). Coefficients of shear correction in transversely nonhomogeneous moderately thick plates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1(40), 73-84.
- Kączkowski, Z. (1980). *Płyty. Obliczenia statyczne*. Warszawa: Arkady.
- Leontiew, N., Leontiew, A., Sobolew, D. i Anochin, N. (1982). *Osnovy teorii balok i plit na deformirujemom uprugom osnovanii*. Moskwa: Tipografija MISI im. W.W. Kujbyszewa.
- Nagiriak, M. (2019). Ocena zasięgu efektu brzegowego w płytach Hencky’ego–Bolle’a o wybranych warunkach brzegowych. *Acta Scientiarum Polonorum. Architectura*, 18(2), 93-105. doi: 10.22630/ASPA.2019.18.2.26
- Nagiriak, M. (2020). Płyty średniej grubości Hencky’ego–Bolle’a na podłożu spręży-

- stym. *Acta Scientiarum Polonorum. Architectura*, 19(2), 51-58. doi: 10.22630/ASPA.2020.19.2.17
- PN-EN 1992-1-1:2004+AC:2008. Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- Sorochan, E. i Trofimenkow, I.U. (1985). *Osnowanija, fundamenty i podziemnyje sooruzhenija*. Moskwa: Strojizdat.
- Własow, V. i Leontiew, N. (1960). *Balki, plitki i oboloczki na urugom osnovy*. Moskwa: Gosudarstwiennoje izdaniye fiziko-matiematycznej literatury.
- Zwołański, W. (1980). Analiza płyty kołowej grubej o ortotropii cylindrycznej spoczywającej na sprężystym podłożu. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 3(18), 449-461.

Streszczenie

Płyty kołowe Hencky’ego–Bolle’a spoczywające na podłożu sprężystym Własowa. W pracy przedstawiono równania teorii płyt obrotowo symetrycznych, spoczywających na jednokierunkowym, jednowarstwowym, dwuparametrowym podłożu Własowa. Przeanalizowano dwa przypadki rozwiązania równania różniczkowego ugięcia płyty cienkiej oraz średniej grubości na podłożu gruntowym w zależności od wielkości całkowitych charakterystyk \hat{r}_α^4 i \hat{S}_α^4 . Rozpatrzono przykład obciążenia płyty kołowej obciążeniem P_k rozłożonym równomiernie na brzegu i przedstawiono bezwymiarowe wykresy ugięcia, momentów zginających oraz sił poprzecznych w płycie oraz podłożu gruntowym. Zbadano wpływ współczynnika Poissona materiału płyty na wartości ugięć oraz sił przekrojowych. Wykazano, że

współczynnik Poissona w znacznym stopniu wpływa na wartości ugięć, momentu zginającego, ma zaś pomijalny wpływ na wartości sił poprzecznych.

Summary

Hencky–Bolle’s circular plates resting on the Vlasov’s elastic subsoil. The work presents the equations of the theory of symmetrical plates, resting on one-way, single-layer, two-parameter Vlasov’s subsoil. Two cases of differential equation solution of the plate deflection of thin and medium thickness on the ground substrate were analyzed depending on the size of the integral characteristics \hat{r}_α^4 and \hat{S}_α^4 . The example of loading the circular plate with a P_k load evenly distributed over the edge was considered and shows dimensionless graphs of deflection, bending torques and transverse forces in the plate and in the ground subsoil. The effect of the Poisson’s coefficient of the plate on deflection values and cross-sectional forces was investigated. The Poisson’s number has been shown to have a significant influence on deflection values and bending torque, however shown negligible effect on transverse forces values.

Author’s address:

Mykola Nagirniak
 (https://orcid.org/0000-0003-4996-7397)
 Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
 w Warszawie
 Instytut Inżynierii Lądowej
 ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa
 Poland
 e-mail: mykola_nagirniak@sggw.edu.pl